

## Zur Konstruktion periodischer Hermite- Interpolationssplines bei äquidistanter Knotenverteilung

GERHARD MERZ UND WILHELM SIPPEL

*Gesamthochschule Kassel—Universität, Fachbereich 17—Mathematik,  
D-3500 Kassel, Federal Republic of Germany*

*Communicated by E. W. Cheney*

Received July 25, 1985

HERRN PROF. DR. G. MEINARDUS ZUM 60. GEBURTSTAG GEWIDMET.

A complex line integral representation of the fundamental splines is used as a starting point for a simple and lucid method for the construction of periodic interpolating Hermite-splines with equidistant knots. Several applications and generalizations are indicated. © 1988 Academic Press, Inc.

### 1

Die Verwendung periodischer Hermite-Interpolationssplines in der Praxis scheiterte bisher häufig daran, daß zur Konstruktion derartiger Funktionen nur Methoden zur Verfügung standen, die ebenso aufwendig wie kompliziert waren. Die in [5] beschriebene Vorgehensweise lieferte zwar eine unter theoretischen Aspekten weitgehend befriedigende Lösung des Problems; vom Standpunkt der Anwendungen litt sie jedoch unter einigen schwerwiegenden Nachteilen. So war es beispielsweise erforderlich, zur Berechnung der (reellen) Spline-Funktionen einen Umweg über das Komplexe einzuschlagen; auch ein starkes Anwachsen des Rechenaufwandes bei wachsender Knotenzahl machte sich unangenehm bemerkbar.

Im Gegensatz hierzu verläuft die im folgenden beschriebene Methode vollständig im Reellen und ist gleichzeitig so einfach und unaufwendig, daß sie einerseits dem interessierten Anwender die vorherige Einarbeitung in eine umfangreiche Theorie erspart und zum andern bereits auf Tischrechnern mittlerer Kapazität ohne Schwierigkeiten durchgeführt werden kann. Die zugrundeliegenden Ideen stellen eine Kombination aus bereits in [4, 5] benutzten Gedankengängen mit einem Einfall von Reimer

[7] dar: auch bei uns läuft im Kern (fast) alles auf eine geschickte Anwendung des Residuensatzes hinaus.

## 2

Den Ausgangspunkt unserer Überlegungen bildet das folgende Interpolationsproblem vom Hermiteschen Typ:

Zu der  $(r, N)$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} y_0^{(0)} & y_1^{(0)} & \cdots & y_{N-1}^{(0)} \\ y_0^{(1)} & y_1^{(1)} & \cdots & y_{N-1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_0^{(r-1)} & y_1^{(r-1)} & \cdots & y_{N-1}^{(r-1)} \end{pmatrix}, \quad r \geq 1, N \geq 1,$$

konstruiere man eine für alle  $x \in \mathbb{R}$  definierte Spline-Funktion  $s(x)$  mit Knoten in den ganzen Zahlen, die durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert ist:

(i)  $s(x)$  besitzt die Periode  $N$

(ii) In jedem Intervall  $[v-1, v]$ ,  $v \in \mathbb{Z}$ , stimmt  $s(x)$  mit einem Polynom  $p_v(x)$  vom Grad  $\leq 2k+1$  überein

(iii)  $s(x) \in C^{2k-r+1}(-\infty, \infty)$

(iv)  $s^{(\rho)}(v) = y_v^{(\rho)}$  für  $v = 0(1)N-1$  und  $\rho = 0(1)r-1$ .

In [5] wurde unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$r \leq k+1 \tag{1}$$

ein konstruktiver Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für den in der angegebenen Weise festgelegten Interpolationsspline  $s(x)$  geführt. Die dort beschriebene Vorgehensweise wird hier in einer für die vorliegenden Untersuchungen geeigneten Form skizziert; für Details sei auf [5] verwiesen.

Wegen der Periodizität genügt es, die Polynomkomponenten  $p_v(x)$  von  $s(x)$  für  $v = 1(1)N$  zu berechnen. Mit der Festlegung

$$q_v(t) := p_v(t+v-1) \tag{2}$$

transformieren sich alle Komponenten von  $s(x)$  auf das Intervall  $0 \leq t \leq 1$  und der gesuchte Interpolationsspline kann vektoriell in der Form

$$\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t))^T, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{3}$$

dargestellt werden.

Offenbar kann man sich zur Lösung unseres Problems auf die Konstruktion der durch die speziellen Interpolationsbedingungen

$$q_{j,\rho}^{(\sigma)}(0) = \delta_{\rho\sigma} \delta_{1j}; \quad \rho, \sigma = 0(1)r - 1, \quad j = 1(1)N,$$

festgelegten sog. Fundamentalsplines

$$\mathbf{q}_\rho(t) = (q_{1,\rho}(t), q_{2,\rho}(t), \dots, q_{N,\rho}(t))^T, \quad \rho = 0(1)r - 1, \quad (4)$$

beschränken. Mit der  $(N, N)$ -Permutationsmatrix

$$\mathbf{T} := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ergeben sich nämlich—da die einmalige Anwendung von  $\mathbf{T}$  auf einen Vektor der Dimension  $N$  eine zyklische Vertauschung von dessen Komponenten bewirkt—wegen

$$\mathbf{q}_\rho^{(\rho)}(0) = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad \rho = 0(1)r - 1,$$

und

$$\mathbf{T}^{v-1} \mathbf{q}_\rho^{(\rho)}(0) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad v = 1(1)N,$$

↑  
vte Komponente

für  $\rho, \sigma = 0(1)r - 1$  die Beziehungen

$$\sum_{v=0}^{N-1} y_v^{(\rho)} \mathbf{T}^v \mathbf{q}_\rho^{(\sigma)}(0) = \delta_{\rho\sigma} (y_0^{(\rho)}, y_1^{(\rho)}, \dots, y_{N-1}^{(\rho)})^T.$$

Nach (3) ist der gesuchte Interpolationsspline demnach in der Form

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{\rho=0}^{r-1} \sum_{v=0}^{N-1} y_v^{(\rho)} \mathbf{T}^v \mathbf{q}_\rho(t) \quad (5)$$

darstellbar.

### 3

Bei der Konstruktion der Fundamentalsplines  $\mathbf{q}_\rho(t)$  spielen die Euler-Frobenius-Polynome  $H_n(1, z)$  sowie deren Verallgemeinerungen  $H_n(t, z)$

und  $H_{n,r}(1, z)$  eine wichtige Rolle. Wir definieren für  $n=0, 1, 2, \dots$  und  $|z| < 1$

$$H_n(t, z) := (1-z)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} (t+v)^n z^v. \quad (6)$$

Dann folgt für  $n \geq 1$ :

1.  $H_n(t, z)$  ist für festes  $t \in [0, 1)$  ein Polynom vom Grad  $n$  in  $z$ ; der Grad von  $H_n(1, z)$  ist gleich  $n-1$ .

2. Es gelten die Beziehungen

$$H_n(t, 0) = t^n$$

$$H_n(t, 1) = n!$$

$$H_n(0, z) = zH_n(1, z), \quad n \neq 0,$$

$$z^n H_n(t, z^{-1}) = H_n(1-t, z), \quad z \neq 0,$$

$$H'_n(t, z) := \frac{\partial}{\partial t} H_n(t, z) = n(1-z) H_{n-1}(t, z), \quad n \neq 0,$$

sowie die Rekursionsformel

$$H_n(t, z) = [t(1-z) + nz] H_{n-1}(t, z) + z(1-z) \frac{\partial}{\partial z} H_{n-1}(t, z).$$

Eine umfassende Zusammenstellung der Eigenschaften von  $H_n(t, z)$  findet man in [8].

3. Bildet man mit den Funktionen  $H_n(1, z)$  die  $r$ -reihige Determinante

$$\Delta^{(n,r)}(z) := \begin{vmatrix} H_n(1, z) & H_{n-1}(1, z) & \cdots & H_{n-r+1}(1, z) \\ H'_n(1, z) & H'_{n-1}(1, z) & \cdots & H'_{n-r+1}(1, z) \\ H''_n(1, z) & H''_{n-1}(1, z) & \cdots & H''_{n-r+1}(1, z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_n^{(r-1)}(1, z) & H_{n-1}^{(r-1)}(1, z) & \cdots & H_{n-r+1}^{(r-1)}(1, z) \end{vmatrix} \quad (7)$$

so gilt für  $r \geq 1$  und  $n \geq 2r-1$  (vgl. [1, Theorem 4])

$$\Delta^{(n,r)}(z) = (-1)^{[r/2]} 0! 1! 2! \cdots (r-1)! (1-z)^{(r-1)(2n-r+2)/2} H_{n,r}(1, z). \quad (8)$$

Hierbei ist  $H_{n,r}(1, z)$  das für  $r \geq 1$  und  $n \geq 2r - 1$  durch die  $(n - r + 1)$ -reihige Determinante

$$\left| \begin{array}{cccccccc}
 \binom{r}{0} & \binom{r}{1} & \dots & \binom{r}{r-1} & 1-z & 0 & \dots & 0 \\
 \binom{r+1}{0} & \binom{r+1}{1} & \dots & \binom{r+1}{r-1} & \binom{r+1}{r} & 1-z & \dots & 0 \\
 \dots & \dots \\
 \binom{n-r}{0} & \binom{n-r}{1} & \dots & \dots & \dots & \binom{n-r}{n-r-1} & 1-z & 0 \\
 \dots & \dots \\
 \binom{n-r+1}{0} & \binom{n-r+1}{1} & \dots & \dots & \dots & \binom{n-r+1}{n-r-1} & \binom{n-r+1}{n-r} & 0 \\
 \dots & \dots \\
 \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \dots & \dots & \binom{n}{n-r-1} & \binom{n}{n-r} & 0
 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n-2r+1 \\ \text{Zeilen} \\ \\ \\ r \text{ Zeilen} \end{array} \tag{9}$$

definierte reziproke Polynom vom Grad  $n - 2r + 1$  in  $z$ , dessen sämtliche Nullstellen reell, einfach und vom Vorzeichen  $(-1)^r$  sind (vgl. [3, Theorem 5]). Insbesondere ist  $H_{n,r}(1, z)$  für ungerades  $n$  und  $z = \pm 1$  von Null verschieden (vgl. [1, Theorem 1]). Ferner gilt

$$H_{n,1}(1, z) = H_n(1, z).$$

4

Wir kommen nun zur Konstruktion der Fundamentalsplines  $q_\rho(t)$ ,  $\rho = 0(1)r - 1$ , der unter 1 formulierten Hermite-Interpolationsaufgabe. In [5] wurde gezeigt, daß diese mit  $\zeta := \exp(2\pi i/N)$  durch

$$q_\rho(t) = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \sum_{\mu=0}^{N-1} \zeta^{-\mu} h_{2k+1,\rho}(t, \zeta^\mu) \\ \sum_{\mu=0}^{N-1} \zeta^{-2\mu} h_{2k+1,\rho}(t, \zeta^\mu) \\ \vdots \\ \sum_{\mu=0}^{N-1} \zeta^{-N\mu} h_{2k+1,\rho}(t, \zeta^\mu) \end{bmatrix}, \quad \rho = 0(1)r - 1, \tag{10}$$

gegeben sind, wobei die Funktionen

$$h_{2k+1,\rho}(t, z) = \sum_{\sigma=0}^{r-1} \alpha_{\sigma\rho}(z) H_{2k+1-\sigma}(t, z) \tag{11}$$

für die in (10) auftretenden Werte von  $z$  als Lösungen der linearen Gleichungssysteme

$$h_{2k+1,\rho}^{(\sigma)}(1, z) = \delta_{\rho\sigma}; \quad \rho, \sigma = 0(1)r-1, \quad (12)$$

mit der Koeffizientendeterminante  $\Delta^{(2k+1,r)}(z)$  nach (7) explizit angegeben werden können.

*Bemerkung.* Im Fall  $\mu = 0$ , d.h.  $z = 1$ , scheinen sich bei der Bestimmung von  $h_{2k+1,\rho}(t, 1)$  nach (11), (12) wegen  $\Delta^{(2k+1,r)}(1) = 0$  zunächst Schwierigkeiten zu ergeben. Da jedoch die Grenzwerte

$$h_{2k+1,\rho}(t, 1) := \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{\sigma=0}^{r-1} \alpha_{\sigma\rho}(z) H_{2k+1-\sigma}(t, z)$$

existieren (und—(vgl. [5, S. 208/9])—als Linearkombinationen von Bernoulli-Polynomen darstellbar sind), ist jede der Funktionen  $h_{2k+1,\rho}(t, 1)$ ,  $\rho = 0(1)r-1$ , wohldefiniert. Beispielsweise folgt für  $k=1$  and  $r=2$  unter Berücksichtigung von

$$\Delta^{(3,2)}(z) = -(1-z)^3 H_{3,2}(1, z) = (z-1)^3$$

aus (11), (12)

$$h_{3,0}(t, z) = -2(1-z)t^3 + 3(1-z)t^2 + z$$

$$h_{3,1}(t, z) = (1+z)t^3 - (2z+1)t^2 + zt$$

und hieraus ergibt sich

$$h_{3,0}(t, 1) = 1, \quad h_{3,1}(t, 1) = 2t^3 - 3t^2 + t = \frac{B_3(t)}{3B_2}.$$

## 5

Ähnlich wie in [7] geben wir nun unter Rückgriff auf eine in diesem Zusammenhang bereits in [4] verwendete Vorgehensweise zunächst Darstellungen der Fundamentalsplines  $q_\rho(t)$  in Form komplexer Linienintegrale an.

Die Auswertung dieser Integrale mit Hilfe des Residuensatzes führt dann zu der angekündigten rein reellen Schreibweise für  $q_\rho(t)$ . Wegen

$$\operatorname{res}_{z=\zeta^\mu} \frac{z^{N-1}}{z^N - 1} = \frac{1}{N}$$

folgt zunächst aus (4), (10) und (11) für die  $j$ te Komponente  $q_{j,\rho}(t)$ ,  $j=1(1)N$ , des Fundamentalsplines  $\mathbf{q}_\rho(t)$ ,  $\rho=0(1)r-1$ , die Beziehung

$$q_{j,\rho}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2 - C_1} h_{2k+1,\rho}(t, z) \frac{z^{N-1-j}}{z^N - 1} dz. \quad (13)$$

Hier bezeichnen  $C_1$  bzw.  $C_2$  positiv orientierte Kreise um den Nullpunkt mit den Radien  $\rho_1 = \rho$  bzw.  $\rho_2 = \rho^{-1}$ , wobei  $\rho < 1$  so gewählt ist, daß  $C_1$  die  $k-r+1$  im Innern des Einheitskreises gelegenen Nullstellen

$$z_1 < z_2 < \dots < z_{k-r+1} \quad (14)$$

von  $H_{2k+1,r}(1, z)$  umschließt.

Eine wesentliche Vereinfachung von (13) ergibt sich nun durch Beachtung des Verhaltens des Integranden bei der Substitution  $z \rightarrow z^{-1}$ . Unter Verwendung der angegebenen Eigenschaften der Euler-Frobenius-Polynome sowie der Determinante  $\Delta^{(2k+1,r)}(z)$  des linearen Gleichungssystems (12) ergibt sich aus (11) die Gültigkeit der Beziehung

$$h_{2k+1,\rho}(t, z^{-1}) = (-1)^\rho z^{-1} h_{2k+1,\rho}(1-t, z). \quad (15)$$

Dies führt mit

$$I_2(t) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} h_{2k+1,\rho}(t, z) \frac{z^{N-1-j}}{z^N - 1} dz$$

auf

$$I_2(t) = \frac{(-1)^\rho}{2\pi i} \oint_{C_1} h_{2k+1,\rho}(1-t, z) \frac{z^{j-2}}{1-z^N} dz \quad (16)$$

und hieraus folgt nach dem Residuensatz unter Beachtung von (14) zunächst für  $j=1$

$$I_2(t) = (-1)^\rho h_{2k+1,\rho}(1-t, 0) + (-1)^\rho \sum_{v=1}^{k-r+1} z_v^{-1} (1-z_v^N)^{-1} \operatorname{res}_{z=z_v} h_{2k+1,\rho}(1-t, z). \quad (17)$$

Analog erhält man für  $j=2(1)N$

$$I_2(t) = (-1)^\rho \sum_{v=1}^{k-r+1} z_v^{j-2} (1-z_v^N)^{-1} \operatorname{res}_{z=z_v} h_{2k+1,\rho}(1-t, z). \quad (18)$$

Entsprechend folgt mit

$$I_1(t) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} h_{2k+1,\rho}(t, z) \frac{z^{N-1-j}}{z^N - 1} dz$$

für  $j = 1(1)N - 1$

$$I_1(t) = \sum_{v=1}^{k-r+1} z_v^{N-1-j} (z_v^N - 1)^{-1} \operatorname{res}_{z=z_v} h_{2k+1,\rho}(t, z) \quad (19)$$

und für  $j = N$

$$I_1(t) = -h_{2k+1,\rho}(t, 0) + \sum_{v=1}^{k-r+1} z_v^{-1} (z_v^N - 1)^{-1} \operatorname{res}_{z=z_v} h_{2k+1,\rho}(t, z). \quad (20)$$

Insgesamt ergibt sich aus (13) sowie (17)–(20) für  $j = 1(1)N$  und  $\rho = 0(1)r - 1$

$$\begin{aligned} q_{j,\rho}(t) &= I_2(t) - I_1(t) = (-1)^\rho h_{2k+1,\rho}(1-t, 0) \delta_{j1} + h_{2k+1,\rho}(t, 0) \delta_{jN} \\ &+ \sum_{v=1}^{k-r+1} (1 - z_v^N)^{-1} [(-1)^\rho z_v^{j-2} \operatorname{res}_{z=z_v} h_{2k+1,\rho}(1-t, z) \\ &+ z_v^{N-1-j} \operatorname{res}_{z=z_v} h_{2k+1,\rho}(t, z)]. \end{aligned} \quad (21)$$

## 6

Wir wollen jetzt einige der in (21) auftretenden Größen noch weiter auswerten. Dazu beachten wir zunächst, daß man aus (11) und (12) auf

$$\alpha_{\sigma\rho}(z) = \frac{\Delta_{\sigma\rho}(z)}{\Delta^{(2k+1,r)}(z)}; \quad \rho, \sigma = 0(1)r - 1, \quad (22)$$

schließen kann. Hier bezeichnet  $\Delta_{\sigma\rho}(z)$  diejenige Determinante, die aus  $\Delta^{(2k+1,r)}(z)$  hervorgeht, wenn dort die  $\sigma$ te Spalte,  $\sigma = 0(1)r - 1$ , durch den Vektor

$$\begin{aligned} &(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \\ &\quad \uparrow \\ &\rho \text{te Komponente,} \quad \rho = 0(1)r - 1 \end{aligned}$$

ersetzt wird. Wegen der für  $m \geq 1$  gültigen Beziehung

$$\left. \frac{\partial^m}{\partial t^m} H_n(t, z) \right|_{t=1} = n(n-1) \cdots (n-m+1)(1-z)^m H_{n-m}(1, z)$$

können die Determinanten  $\Delta_{\sigma\rho}(z)$  in (22) durch die Euler-Frobenius-Polynome  $H_n(1, z)$  ausgedrückt werden.

Damit folgt für  $\rho = 0(1)r - 1$  insbesondere

$$h_{2k+1,\rho}(t, 0) = \sum_{\sigma=0}^{r-1} \frac{A_{\sigma\rho}(0)}{A^{(2k+1,r)}(0)} t^{2k+1-\sigma} \quad (23)$$

sowie unter Verwendung von

$$H_{n,r}^z(t, z) := \frac{\partial}{\partial z} H_{n,r}(t, z)$$

zusammen mit (8)

$$\operatorname{res}_{z=z_v} h_{2k+1,\rho}(t, z)$$

$$= (-1)^{[r/2]} \frac{\sum_{\sigma=0}^{r-1} A_{\sigma\rho}(z_v) H_{2k+1-\sigma}(t, z_v)}{0! 1! 2! \dots (r-1)! (1-z_v)^{(r-1)(4k-r+4)/2} H_{2k+1,r}^z(1, z_v)}. \quad (24)$$

## 7

Aus (23) erhält man für

$$r = 2:$$

$$h_{2k+1,0}(t, 0) = t^{2k}(-2kt + 2k + 1)$$

$$h_{2k+1,1}(t, 0) = t^{2k}(t - 1)$$

$$r = 3:$$

$$h_{2k+1,0}(t, 0) = t^{2k-1}[k(2k-1)t^2 - (4k^2-1)t + k(2k+1)]$$

$$h_{2k+1,1}(t, 0) = t^{2k-1}[-(2k-1)t^2 + (4k-1)t - 2k]$$

$$h_{2k+1,2}(t, 0) = \frac{1}{2}t^{2k-1}(t-1)^2$$

$$r = 4:$$

$$h_{2k+1,0}(t, 0) = \frac{1}{3}t^{2k-2}[-2k(k-1)(2k-1)t^3 + 3(k-1)(4k^2-1)t^2 - 6k(k-1)(2k+1)t + k(4k^2-1)]$$

$$h_{2k+1,1}(t, 0) = t^{2k-2}[(k-1)(2k-1)t^3 - (k-1)(6k-1)t^2 + k(6k-5)t - k(2k-1)]$$

$$h_{2k+1,2}(t, 0) = \frac{1}{2}t^{2k-2}[-2(k-1)t^3 + (6k-5)t^2 - 2(3k-2)t + (2k-1)]$$

$$h_{2k+1,3}(t, 0) = \frac{1}{6}t^{2k-2}(t-1)^3$$

$r = 5$ :

$$h_{2k+1,0}(t, 0) = \frac{1}{6}t^{2k-3} [k(k-1)(2k-1)(2k-3)t^4 \\ - 2(k-1)(4k^2-1)(2k-3)t^3 + 6k(k-1)(2k+1)(2k-3)t^2 \\ - 2k(2k-3)(4k^2-1)t + k(k-1)(4k^2-1)]$$

$$h_{2k+1,1}(t, 0) = \frac{1}{3}t^{2k-3} [-(k-1)(2k-1)(2k-3)t^4 \\ + (k-1)(2k-3)(8k-1)t^3 - 3k(2k-3)(4k-3)t^2 \\ + k(2k-1)(8k-11)t - 2k(k-1)(2k-1)]$$

$$h_{2k+1,2}(t, 0) = \frac{1}{2}t^{2k-3} [(k-1)(2k-3)t^4 - (2k-3)(4k-3)t^3 \\ + 2(6k^2-12k+5)t^2 - (2k-1)(4k-5)t + (k-1)(2k-1)]$$

$$h_{2k+1,3}(t, 0) = \frac{1}{6}t^{2k-3} [-(2k-3)t^4 + (8k-11)t^3 \\ - 3(4k-5)t^2 + (8k-9)t - 2(k-1)]$$

$$h_{2k+1,4}(t, 0) = \frac{1}{24}t^{2k-3}(t-1)^4.$$

Die Koeffizienten der Euler-Frobenius-Polynome

$$H_n(1, z) = \sum_{v=0}^{n-1} \beta_{n,v} z^v$$

lassen sich für  $n \geq 2$  aus der Rekursionsformel

$$\beta_{n+1,v} = (v+1)\beta_{n,v} + (n+1-v)\beta_{n,v-1}$$

bestimmen; dabei ist  $\beta_{n,0} = \beta_{n,n-1} = 1$  zu setzen.

Die verallgemeinerten Euler-Frobenius-Polynome  $H_n(t, z)$  können für  $n \geq 1$  aus den Beziehungen

$$H_n(t, z) = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} [t(1-z)]^{n-v} H_v(0, z)$$

bzw. (vgl. [8, S. 14])

$$H_n(t, z) = \sum_{v=0}^n \sum_{\mu=0}^v (-1)^\mu \binom{n+1}{\mu} (v-\mu+t)^n z^v$$

berechnet werden. Dies führt auf

$$H_0(t, z) = 1$$

$$H_1(t, z) = (1 - z)t + z = (1 - t)z + t$$

$$\begin{aligned} H_2(t, z) &= (1 - z)^2 t^2 + 2z(1 - z)t + z(1 + z) \\ &= (1 - t)^2 z^2 + (1 + 2t - 2t^2)z + t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3(t, z) &= (1 - z)^3 t^3 + 3z(1 - z)^2 t^2 + 3z(1 - z^2)t + z(1 + 4z + z^2) \\ &= (1 - t)^3 z^3 + (4 - 6t^2 + 3t^3)z^2 + (1 + 3t + 3t^2 - 3t^3)z + t^3 \end{aligned}$$

usw.

Für die Polynome  $H_{n,r}(1, z)$  erhält man schließlich aus (9) für

$$r = 2: H_{3,2}(1, z) = 1$$

$$H_{5,2}(1, z) = 1 - 6z + z^2$$

$$H_{7,2}(1, z) = 1 - 72z + 262z^2 - 72z^3 + z^4$$

$$\begin{aligned} H_{9,2}(1, z) &= 1 - 522z + 13839z^2 - 38732z^3 \\ &\quad + 13839z^4 - 522z^5 + z^6 \end{aligned}$$

$$r = 3: H_{5,3}(1, z) = 1$$

$$H_{7,3}(1, z) = 1 + 8z + z^2$$

$$H_{9,3}(1, z) = 1 + 150z + 706z^2 + 150z^3 + z^4$$

$$\begin{aligned} H_{11,3}(1, z) &= 1 + 1524z + 81159z^2 + 288232z^3 \\ &\quad + 81159z^4 + 1524z^5 + z^6 \end{aligned}$$

$$r = 4: H_{7,4}(1, z) = 1$$

$$H_{9,4}(1, z) = 1 - 10z + z^2$$

$$H_{11,4}(1, z) = 1 - 268z + 1542z^2 - 268z^3 + z^4$$

$$\begin{aligned} H_{13,4}(1, z) &= 1 - 3598z + 331279z^2 - 1418564z^3 \\ &\quad + 331279z^4 - 3598z^5 + z^6 \end{aligned}$$

$$r = 5: H_{9,5}(1, z) = 1$$

$$H_{11,5}(1, z) = 1 + 12z + z^2$$

$$H_{13,5}(1, z) = 1 + 434z + 2946z^2 + 434z^3 + z^4$$

$$\begin{aligned} H_{15,5}(1, z) &= 1 + 7408z + 1073703z^2 + 5365472z^3 \\ &\quad + 1073703z^4 + 7408z^5 + z^6. \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Die Berechnung von  $H_{n,r}(1, z)$  kann durch folgende Beobachtung wesentlich vereinfacht werden:

Mit den  $(n - 2r + 1)$ -reihigen quadratischen Matrizen

$$\mathbf{A}_{n,r} := \begin{bmatrix} \binom{r}{0} & \binom{r}{1} & \binom{r}{2} & \cdots & \binom{r}{n-2r} \\ \binom{r+1}{0} & \binom{r+1}{1} & \binom{r+1}{2} & \cdots & \binom{r+1}{n-2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n-r}{0} & \binom{n-r}{1} & \binom{n-r}{2} & \cdots & \binom{n-r}{n-2r} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{n,r} := \begin{bmatrix} \binom{r}{0} & -\binom{r}{1} & \binom{r}{2} & \cdots & (-1)^{n-2r} \binom{r}{n-2r} \\ 0 & \binom{r}{0} & -\binom{r}{1} & \cdots & (-1)^{n-2r-1} \binom{r}{n-2r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{r}{0} \end{bmatrix}$$

gilt

$$H_{n,r}(1, z) = \det(\mathbf{A}_{n,r} + (-1)^{r+1} z \mathbf{B}_{n,r})$$

(vgl. hierzu auch [3, Lemma 3]).

Wir geben noch die im Innern des Einheitskreises gelegenen Nullstellen von  $H_{n,r}(1, z)$  für einige häufig vorkommende Werte von  $n$  und  $r$  in der durch (14) festgelegten Reihenfolge an:

$$r = 2$$

$$H_{5,2}(1, z): \quad z_1 = 0.171572875254$$

$$H_{7,2}(1, z): \quad z_1 = 0.014668717612$$

$$z_2 = 0.283307061239$$

$$H_{9,2}(1, z): \quad z_1 = 0.002023664713$$

$$z_2 = 0.040445024552$$

$$z_3 = 0.368908801064$$

$r = 3$ 

$$H_{7,3}(1, z): z_1 = -0.127016653793$$

$$H_{9,3}(1, z): z_1 = -0.006889759378$$

$$z_2 = -0.215778507126$$

$$H_{11,3}(1, z): z_1 = -0.000680790199$$

$$z_2 = -0.019486882416$$

$$z_3 = -0.286049359374$$

 $r = 4$ 

$$H_{9,4}(1, z): z_1 = 0.101020514434$$

$$H_{11,4}(1, z): z_1 = 0.003815030184$$

$$z_2 = 0.175450589108$$

$$H_{13,4}(1, z): z_1 = 0.000285423919$$

$$z_2 = 0.011117277550$$

$$z_3 = 0.235727724012$$

 $r = 5$ 

$$H_{11,5}(1, z): z_1 = -0.083920216900$$

$$H_{13,5}(1, z): z_1 = -0.002341345872$$

$$z_2 = -0.148266363719$$

$$H_{15,5}(1, z): z_1 = -0.000137737003$$

$$z_2 = -0.007012022530$$

$$z_3 = -0.201364232998.$$

*Bemerkungen.* (i) Die hier geschilderte Vorgehensweise führt auch in dem Fall zum Ziel, daß man die Knoten der Splines in den ganzen Zahlen  $v \in \mathbb{Z}$  beläßt, die Interpolationsstellen jedoch in die Punkte  $v - \lambda$  mit fest gewähltem Verschiebungsparameter  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ , legt (vgl. [6, 8]). In diesem Fall sind anstelle der Funktionen  $H_{n,r}(1, z)$  allgemeiner Funktionen  $H_{n,r}(t, z)$  mit  $t = 1 - \lambda$  zu verwenden, die aus (9) dadurch entstehen, daß dort die Binomialkoeffizienten  $\binom{m}{k}$  jeweils durch  $\binom{m}{k} [t^{m-k} - z(t-1)^{m-k}]$  ersetzt werden.

(ii) Es liegt nahe, sowohl (10) als auch die daraus abgeleitete reelle Form (21) der Fundamentalsplines zur Berechnung von Normen der zugeordneten Spline-Interpolationsoperatoren  $L_{2k+1,r}$  heranzuziehen.

Wählt man etwa  $k=r=2$ , so ergibt sich aus (10) bei Zugrundelegung der Tschebyscheff-Norm im Fall  $N=2m$

$$\begin{aligned} \|L_{5,2}^N\|_\infty &= 1 + \frac{1}{32\pi i} \oint_{|z|=1/2} \frac{1-z^m}{1+z^m} \frac{z^2-38z+1}{z(z^2-6z+1)} dz \\ &= 1 + \frac{1}{16} \left[ 1 + 4\sqrt{2} \frac{1-(3-2\sqrt{2})^m}{1+(3-2\sqrt{2})^m} \right]. \end{aligned}$$

Hieraus entnimmt man durch Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$  für die Norm des Operators der kardinalen Hermite-Interpolation

$$\|L_{5,2}\|_\infty := \lim_{N \rightarrow \infty} \|L_{5,2}^N\|_\infty = \frac{1}{16} (17 + 4\sqrt{2}) = 1.41605\dots$$

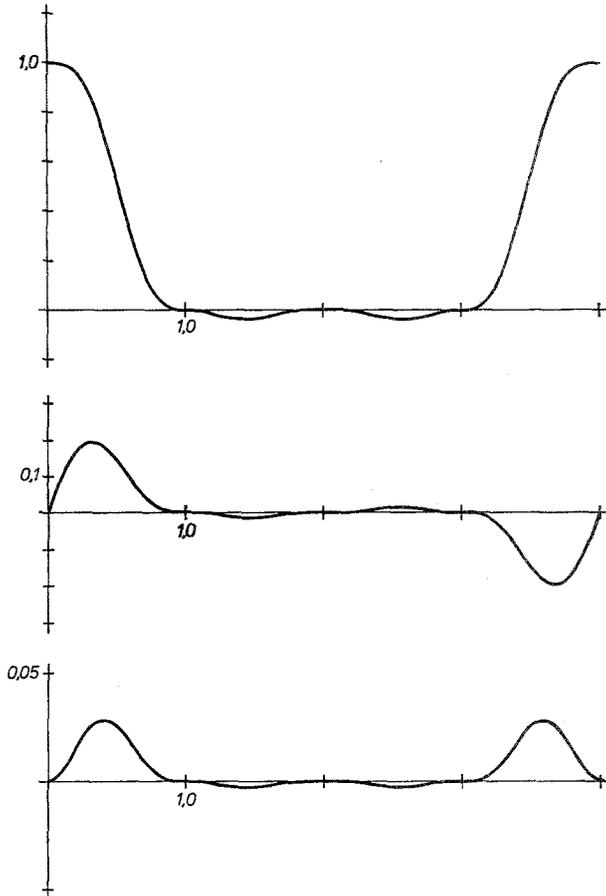


ABB. 1. Graphen der Fundamentalsplines  $q_0(t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  für  $N=4$ ,  $r=3$ ,  $k=3$ .

Dieses Ergebnis korrigiert die auf andere Weise gewonnene Angabe

$$\|L_{5,2}\|_{\infty} = \frac{1}{224} (265 + 54\sqrt{2})$$

aus [2].

Über die unter (i) und (ii) genannten Problemstellungen soll an anderer Stelle ausführlich berichtet werden.

## 8

Abschließend wird das qualitative Verhalten der Fundamentalsplines bei Hermite-Interpolation durch die Wiedergabe der zugehörigen Graphen im Fall  $N=4$ ,  $r=3$ ,  $k=3$  illustriert (Abbildung 1).

## REFERENCES

1. S. L. LEE AND A. SHARMA, Cardinal lacunary interpolation by  $g$ -splines I. The characteristic polynomials, *J. Approx. Theory* **16** (1976), 85–96.
2. P. R. LIPOW, Uniform bounds for cardinal Hermite spline operators with double knots, *J. Approx. Theory* **16** (1976), 372–383.
3. P. R. LIPOW AND I. J. SCHOENBERG, Cardinal interpolation and spline functions III. Cardinal Hermite interpolation, *Linear Algebra Appl.* **6** (1973), 273–304.
4. G. MEINARDUS UND G. MERZ, Zur periodischen Spline-Interpolation, in "Spline-Funktionen" (K. Böhmer *et al.*, Eds.), S. 177–195, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1974.
5. G. MEINARDUS UND G. MERZ, Hermite-Interpolation mit periodischen Spline-Funktionen, in "Numerical Methods of Approximation Theory, ISNM No. 52" (L. Collatz, G. Meinardus, and H. Werner, Eds.), pp. 200–210, Birkhäuser, Basel, 1980.
6. G. MERZ, Interpolation mit periodischen Spline-Funktionen I, *J. Approx. Theory* **30** (1980), 11–19.
7. M. REIMER, Extremal spline bases, *J. Approx. Theory* **36** (1982), 91–98.
8. D. SIEPMANN, "Kardinale Spline-Interpolation bezüglich äquidistant verteilter Knoten," Dissertation, Dortmund, 1984.